実力をつけるために…

どうしたら自転車が上手に乗れるようになるのだろうか？
補助輪を付けて練習した人もいたでしょう．何度も転んで怪我をして，それでも諦めずに乗り続けることで，上手く乗れるようになりました．自転車に３回しか乗ったことがない人と300回乗ったことがある人ではどちらが上手に乗れるでしょうか．その答は明白です．自転車を上手に乗れるようになる為に，競輪選手のビデオを徹底研究する人がいたとしたら，あなたはどうアドバイスしますか？
そんなものをいくら見て研究しても，実際に自転車に乗ってみないと上手にはならないとアドバイスするでしょう．

受験勉強というのは，数学に限らず，自転車を上手に乗ることに似ています．一流の学者の論文を読んだりしてもいけないわけで，実際に自分のまわりにある問題と実際に格闘してもがいて苦しんではじめて問題が上手に解けるようになるのですね．
ただ，受験勉強の場合は，自転車における補助輪に相当する，参考書や予備校，そして「スタディサプリ」など，これから実力をつけようと考えている受験生にとっての踏み台になるものが沢山あります．
それらを上手に利用して，最後は自分の力で時間の許す限り多くの問題を経験して，制限時間内でちゃんとした解答を書けるようになるまで徹底的に練習することによって，合格がより確実なものになるわけです．

以上のことを意識しながら授業を受けて，自分の及ばない所を少しでもなおしていけば，必ず数学はできるようになるはずです．

最後まで諦めずに頑張りましょう!!

堺　義明

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

高３　ハイレベル数学Ⅲ

目　次

第１講　複素数平面の基礎 ―― p.4
第２講　複素数で点を移動 ―― p.8
第３講　複素数の方程式と図形 ―― p.12
第４講　ド・モアブルの定理 ―― p.16
第５講　２次曲線 ―― p.20
第６講　媒介変数で表示された曲線 ―― p.24
第７講　極限の基本 ―― p.28
第８講　漸化式と極限 ―― p.32
第９講　ちょっと困った極限 ―― p.36
第 10 講　無限級数 ―― p.40
第 11 講　微分の基本 ―― p.44
第 12 講　接線など ―― p.48
第 13 講　グラフの描き方（その１） ―― p.52
第 14 講　グラフの描き方（その２） ―― p.56
第 15 講　最大・最小 ―― p.60
第 16 講　実数解に関する問題 ―― p.64
第 17 講　不等式について ―― p.68
第 18 講　積分の基礎 ―― p.72
第 19 講　部分積分 ―― p.76
第 20 講　置換積分 ―― p.80
第 21 講　面積 ―― p.84
第 22 講　体積 ―― p.88
第 23 講　積分でやっておくこと（その１） ―― p.92
第 24 講　積分でやっておくこと（その２） ―― p.96

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　複素数平面の基礎

1

［A］　座標平面において，点 A を原点を中心として θ だけ回転し，さらに，ベクトル $\vec{a}$ だけ移動した点を P とする．点 A を $\vec{a}$ だけ移動し，さらに原点を中心として θ だけ回転した点を Q とする．ただし，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする．

(1)　点 A を $(1,\ 0)$ としたとき，点 P が $(1,\ 1)$ となるような θ, $\vec{a}$ のうち，$\vec{a}$ の大きさを最小にするものを求めよ．

(2)　$\vec{a}$ の大きさを l，P と Q の距離を d とするとき $d \leqq 2l$ であることを示せ．

［B］　複素数 α，β は $3\alpha^2+5\beta^2-6\alpha\beta=0$，$|\alpha+\beta|=1$ を満たすとする．

(1)　$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を求めよ．

(2)　$\arg\left(\dfrac{\beta-\alpha}{\beta}\right)$ を求めよ．

(3)　$|\beta|$ を求めよ．

(4)　複素数平面上で 0，α，β を 3 頂点とする三角形の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　複素数平面の基礎

1　次の問いに答えよ．

(1)　座標平面上の点 A$(2,\ 1)$ を原点 O のまわりに 60° 回転した点 B の座標を求めよ．

(2)　点 A$(2,\ 1)$ を点 P のまわりに 60° 回転した点の座標は $\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であった．点 P の座標を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　複素数平面の基礎

1

［A］ 座標平面において，点Aを原点を中心としてθだけ回転し，さらに，ベクトル$\vec{a}$だけ移動した点をPとする．点Aを$\vec{a}$だけ移動し，さらに原点を中心としてθだけ回転した点をQとする．ただし，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$とする．

(1) 点Aを$(1, 0)$としたとき，点Pが$(1, 1)$となるようなθ，$\vec{a}$のうち，$\vec{a}$の大きさを最小にするものを求めよ．

(2) $\vec{a}$の大きさをl，PとQの距離をdとするとき$d \leqq 2l$であることを示せ．

［B］ 複素数α，βは$3\alpha^2+5\beta^2-6\alpha\beta=0$，$|\alpha+\beta|=1$を満たすとする．

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$を求めよ．

(2) $\arg\left(\dfrac{\beta-\alpha}{\beta}\right)$を求めよ．

(3) $|\beta|$を求めよ．

(4) 複素数平面上で0，α，βを3頂点とする三角形の面積を求めよ．

【答】 ［A］ (1) $\theta=45^\circ$，$\vec{a}=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$　(2) 略

［B］ (1) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{3\pm\sqrt{6}\,i}{3}$　(2) $\arg\left(\dfrac{\beta-\alpha}{\beta}\right)=\pm 90^\circ$（または$90^\circ$，$270^\circ$）　(3) $|\beta|=\sqrt{\dfrac{3}{14}}$

(4) $\dfrac{\sqrt{6}}{28}$

【解説】

［A］ 点A，P，Qを表す複素数をそれぞれα，z，z'とし，$\cos\theta+i\sin\theta=\omega$とおく．さらに$\vec{a}$に対応する複素数を$a$とする．題意より

$$z=\alpha\omega+a,\quad z'=(\alpha+a)\omega$$

となる．

(1) $z=1+i$，$\alpha=1$とすると

$$1+i=\omega+a \iff a=1+i-\omega$$

$$\therefore\ |a|=|1+i-\omega|$$
$$\geqq |1+i|-|\omega|=\sqrt{2}-1$$

等号成立は$1+i=\sqrt{2}\,\omega$のときなので，$\boldsymbol{\theta=45^\circ}$のとき$|a|$は最小となり

$$a=(\sqrt{2}-1)\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\vec{a}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)
$$\begin{aligned} d &= |z'-z| \\ &= |(\alpha+a)\omega-(\alpha\omega+a)| \\ &= |a(\omega-1)| \\ &\leqq |a|(|\omega|+|-1|)=2l \end{aligned}$$

［B］ (1)　$3\alpha^2+5\beta^2-6\alpha\beta=0$ において $\beta=0$ とすると $\alpha=0$ となり $|\alpha+\beta|=1$ に反する.

よって $\beta\neq0$ なので両辺を β^2 で割ると

$$3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-6\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+5=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3\pm\sqrt{6}\,i}{3}}$$

(2)
$$\begin{aligned} \frac{\beta-\alpha}{\beta} &= 1-\frac{\alpha}{\beta} \\ &= 1-\frac{3\pm\sqrt{6}\,i}{3} \\ &= \mp\frac{\sqrt{6}}{3}i \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{\arg\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta}\right)=\pm90^\circ}$$

(3)　$\alpha=\left(1\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}i\right)\beta$ より

$$\begin{aligned} |\alpha+\beta|=1 &\iff \left|\left(2\pm\frac{\sqrt{6}}{3}i\right)\beta\right|=1 \\ &\iff \sqrt{4+\frac{2}{3}}\,|\beta|=1 \\ &\therefore\quad \boldsymbol{|\beta|=\sqrt{\frac{3}{14}}} \end{aligned}$$

(4)　(2)より

$$\frac{\beta-\alpha}{\beta}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}i \iff \frac{\alpha-\beta}{0-\beta}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}i$$

となるので O(0)，A(α)，B(β) とすると

$$\angle\mathrm{OBA}=90^\circ \text{ かつ } \mathrm{AB}=\frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{OB}$$

ここで(3)より $\mathrm{OB}=\sqrt{\dfrac{3}{14}}$ なので △OAB の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{AB} &= \frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{OB}^2 \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{3}{14} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{28}} \end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

練習問題解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　複素数平面の基礎

1　次の問いに答えよ．

(1)　座標平面上の点 A(2, 1) を原点 O のまわりに 60° 回転した点 B の座標を求めよ．

(2)　点 A(2, 1) を点 P のまわりに 60° 回転した点の座標は $\left(\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であった．点 P の座標を求めよ．

【答】 (1) $\mathrm{B}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$　(2) P(1, −2)

【解説】

(1)　B(z) とすると，

$$z-0=(2+i-0)(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$$

$$\therefore\quad z=(2+i)\cdot\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\,i)$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+2\sqrt{3}}{2}i$$

よって

$$\mathbf{B}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$$

(2)　P(z) とすると，

$$\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i-z$$

$$=(2+i-z)(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$$

$$\iff\quad \frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}z=\frac{1-2\sqrt{3}}{2}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}i$$

$$\iff\quad z=\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\therefore\quad z=1-2i$$

ゆえに

$$\mathbf{P(1,\ -2)}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。